

# A Geometria do Voo

por David Mota Ellery

- INTRODUÇÃO

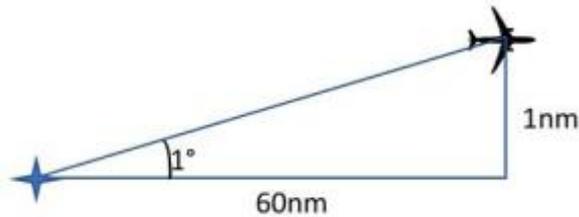
O objetivo deste artigo é fornecer ao aviador um conjunto de conceitos matemáticos de fácil memorização que permitirão um gerenciamento mais eficiente da máquina que nós operamos, o avião. Com a prática, você verá que a compreensão matemática do comportamento da aeronave é uma ferramenta poderosa. Existem inúmeros livros disponíveis sobre o assunto. Eu recomendo o excelente livro de Mike Roumens, *“M3 - the Mile, The Mach, the Minute.”*

Das variáveis que gerenciamos durante o voo, as principais são distância, velocidade e ângulos. Distância em milhas náuticas, velocidade em nós e ângulos em graus – bom, pelo menos eu nunca vi um instrumento em radianos, a não ser as retículas de antigas aeronaves de combate.

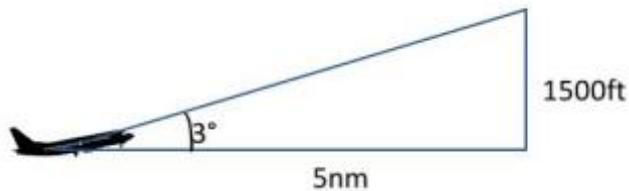
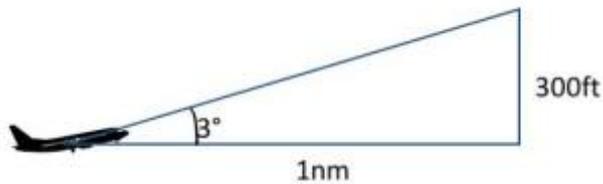
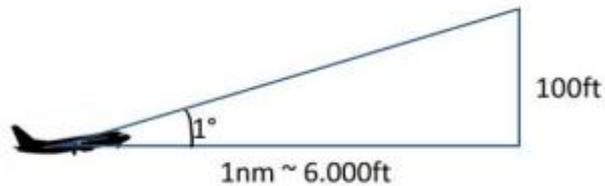
E o que é a milha náutica? A milha náutica é um minuto de arco em qualquer meridiano. Vejamos. A circunferência da terra é de aproximadamente 40.000km. Se você dividir isso por 360 achará o valor de um grau, que é 111.11km. Um grau tem sessenta minutos, portanto se você dividir 111.11 por 60, achará o valor de um minuto de arco. Se você fez a conta viu que o valor é cerca de dois décimos menor, não exatamente o valor que conhecemos. O valor 1.852m foi estabelecido no ano de 1929 numa conferência em Mônaco.

Vimos que as três variáveis estão intimamente relacionadas. A distância é uma fração de ângulo e a velocidade é a razão entre distância e tempo. Tempo e ângulo são medidas que ainda usam o antigo sistema numérico sexagesimal, e a base 60 é muito importante aqui. Veremos a seguir como estas variáveis se relacionam durante o voo.

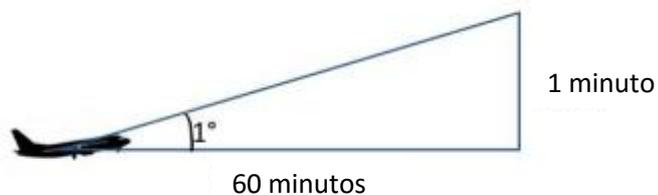
Uma aeronave derivando  $1^\circ$  por 60nm estará 1nm afastada de sua rota original.



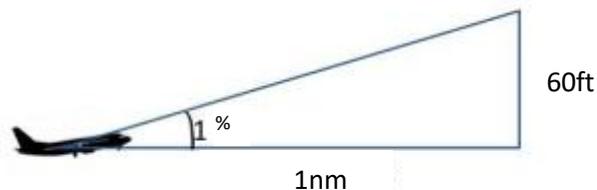
Além disso, uma milha equivale à aproximadamente 6.000ft. Seguindo o mesmo raciocínio, posso dizer que se a aeronave derivar  $1^\circ$  em 1nm, o afastamento final será de 100ft.



Se usarmos tempo no lugar da distância, teremos o seguinte resultado.



No caso de gradientes, a ideia é a mesma. 1% de 6.000ft é 60ft.



Pelo exposto acima, podemos concluir vários cálculos de fácil memorização que descrevem o comportamento da aeronave.

## • PERFIL DE DESCIDA

$$\text{FPA}^\circ = \Delta\text{FL} / \text{DIST}_{\text{nm}}$$

**Exemplo 1:** digamos que você está no FL350 e quer descer para a altitude do fixo de aproximação inicial, onde a altitude é FL050. O delta FL aqui será 300. Se você deseja manter uma descida de 3°, com quantas milhas antes do fixo deverá iniciar a descida?

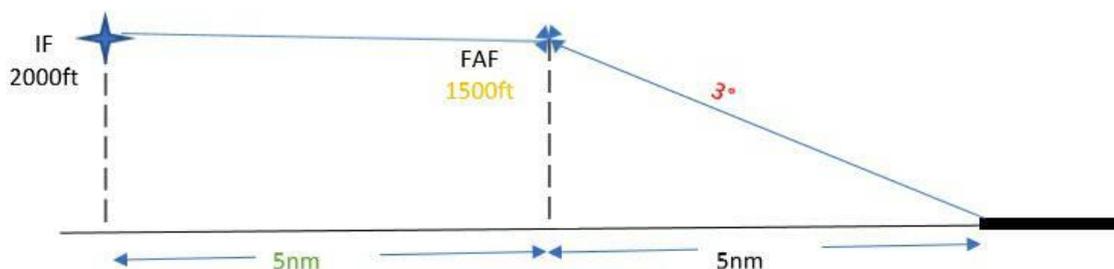
$$3 = 300/X \rightarrow 3.X = 300 \rightarrow X = 300/3 \rightarrow X = 100\text{nm}$$

Se a sua aeronave é equipada com a função FPA, basta selecionar -3° e comandar a descida a 100 milhas do fixo. Nenhuma outra intervenção será necessária pois o FPA não é afetado por mudanças de *ground speed*. Se não é ou você não gosta da função, mais a frente eu direi como derivar a razão de descida a partir do FPA.

Durante a descida é possível checar a validade do perfil simplesmente multiplicando o FPA pela distância do fixo. Com relação ao exemplo anterior, digamos que ao passar 50 milhas do fixo você está no FL 200. Estamos na rampa? Vejamos. Multiplicando 3 por 50, achamos FL 150. Se adicionarmos a altitude do fixo (050) encontramos FL200, exatamente no perfil. Lembre-se de deixar uma margem para desaceleração.

Esta relação vale para qualquer ângulo escolhido. Digamos que você escolheu descer com uma rampa de 5° (vai ser meio radical, não aconselho). Você está no FL 330 e vai descer para o nível do mar. Já vimos que para encontrar a distância devemos dividir 330 por 5. Ou seja, inicie a descida com 66nm.

**Exemplo 2:** vejamos como isso pode ajudar numa aproximação.



Neste exemplo, se você passar o IF a 2.000ft estará abaixo da rampa. Se a intenção é essa, tudo certo. Mas se a intenção é estabelecer uma descida constante a partir do *Intermediate Fix*, em qual altitude devo passar naquele ponto? Como a rampa deste procedimento é de 3°, basta multiplicar a distância entre o FAF e o IF por 3 e adicionar à altitude do FAF.  $3^\circ \times 5\text{nm} = 1.500\text{ft} + 1.500\text{ft} = 3.000\text{ft}$

Passando o IF a 3.000ft há grandes chances de um “*double capture*” (Loc e Glide). Novamente, esta relação pode ser aplicada em qualquer tipo de aproximação. Você já deve ter percebido que, ao realizar um procedimento de não precisão, o FMS calcula uma altitude nas proximidades do IF que não consta na carta. Esta altitude, aparentemente aleatória, é tão somente o resultado deste cálculo codificado no banco de dados da aeronave. A ICAO denomina este conceito de *constant descent final approach* (CDFA).

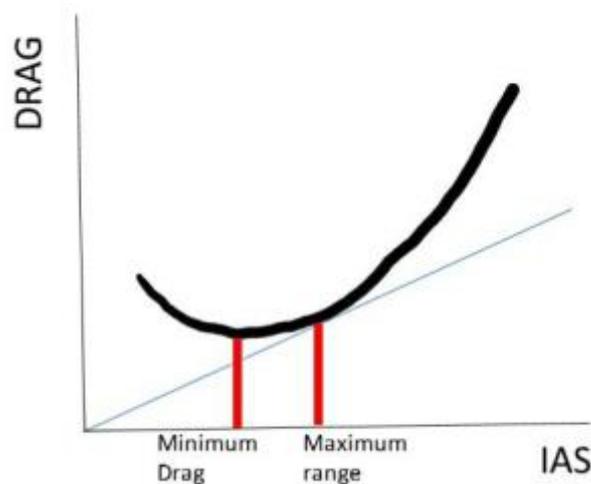
## ● PERFIL DE SUBIDA

Embora os conceitos da sessão anterior também sejam aplicáveis, não é comum pensar a subida como um segmento geométrico. Normalmente a subida é realizada em função da velocidade indicada. Na verdade, **a razão de subida é a projeção vertical da velocidade longitudinal da aeronave.**

Existem dois cenários principais de interesse dos pilotos na subida:

1. Máxima razão de subida
2. Máximo ângulo de subida

Há uma velocidade característica associada a cada um dos casos. A seguir, identifico na curva de arrasto os dois pontos de interesse.



Portanto se a intenção é empregar máxima razão de subida, a velocidade de *maximum range* é o que você procura. Se a intenção é máximo ângulo de subida, deve manter a velocidade de *minimum drag*. Esta relação só vale para aeronaves a jato. A razão para isso é um pouco complexa e a explicação fugiria da intenção deste artigo.

A velocidade de *maximum range* equivale a *cost index* 0. Para a velocidade de *minimum drag*, ou L/D MAX, a maneira de identificá-la varia entre os fabricantes.

## • VELOCIDADE EM MILHAS POR MINUTO (MPM)

A velocidade em nós é a expressão de milhas náuticas por hora. Para a realização de cálculos mentais, pode ser mais rápido e proveitoso pensar na velocidade em milhas por minuto. Então para achar, por exemplo, 120kt na forma milhas por minuto basta dividir a velocidade por sessenta.  $120 \div 60 = 2$  MPM.

60kt = 1 MPM

120kt = 2 MPM

180kt = 3 MPM

240kt = 4 MPM

300kt = 5 MPM

360kt = 6 MPM

420kt = 7 MPM

480kt = 8 MPM

540kt = 9 MPM

Posso usar esta relação também para *mach*? O número *mach* (M) é a razão entre a *true airspeed* (TAS) e a velocidade do som no nível de voo. Sabemos que a velocidade do som varia com a altitude. No entanto posso assumir que, acima de 25.000ft e abaixo da tropopausa, a velocidade do som é **aproximadamente** 600kt. Trata-se de uma aproximação mas, para efeito dos nossos cálculos, a diferença se torna desprezível. 600kt (~*mach* 1) equivale a 10 milhas por minuto. Portanto:

60kt = 1 MPM ~ Mach 0.1

120kt = 2 MPM ~ Mach 0.2

180kt = 3 MPM ~ Mach 0.3

240kt = 4 MPM ~ Mach 0.4

300kt = 5 MPM ~ Mach 0.5

360kt = 6 MPM ~ Mach 0.6

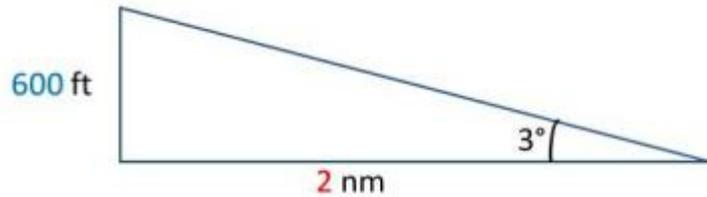
420kt = 7 MPM ~ Mach 0.7

480kt = 8 MPM ~ Mach 0.8

540kt = 9 MPM ~ Mach 0.9

Então da próxima vez que você estiver se perguntando se vai conseguir passar aquele cara 40nm a sua frente em cruzeiro, basta calcular. Supondo que você sabe que o tráfego a frente e acima está mantendo *mach* .77 e você mantém .80, isso quer dizer que você está aproximando a uma razão de 0.3 milhas por minuto. Arredondando, podemos dizer que a cada três minutos você aproxima uma milha. Ou seja, a ultrapassagem será em 120 minutos.

- **RAZÃO DE DESCIDA**



Nós estabelecemos esta relação no começo do texto. O que eu proponho agora é pensar nestas 2 nm, não como uma distância, mas como uma velocidade. Se eu digo que isto é 2 milhas por minuto (120kt), eu tenho que este 600 ft é, na verdade, 600 ft/min. Aí está nossa razão de descida em função do ângulo de descida e da velocidade.

**Exemplo 3:** você está na final, numa rampa de 3° e *ground speed* 140kt. Qual deverá ser sua razão de descida? Claro que você pode olhar na carta, mas a ideia é ter a compreensão matemática do voo. 140 kt equivale a 2.33 MPM. Então teremos  $2.33 \times 3 = 700$ . Portanto a razão de descida será de 700 ft/min.

$$\text{FPA}^\circ \times \text{MPM} = \text{Razão de descida}$$

Fazer contas com números decimais durante a final pode não ser viável, mas no caso específico da rampa de três graus, existe um atalho. Basta dividir sua *ground speed* por 2. No caso em questão,  $140 \div 2 = 70$ . Você deveria multiplicar 70 por 10, mas nós sabemos que este 70 quer dizer 700 ft/min, então não é necessário estender a conta.

$$\text{Razão de descida na final } 3^\circ = \text{GS} / 2^*$$

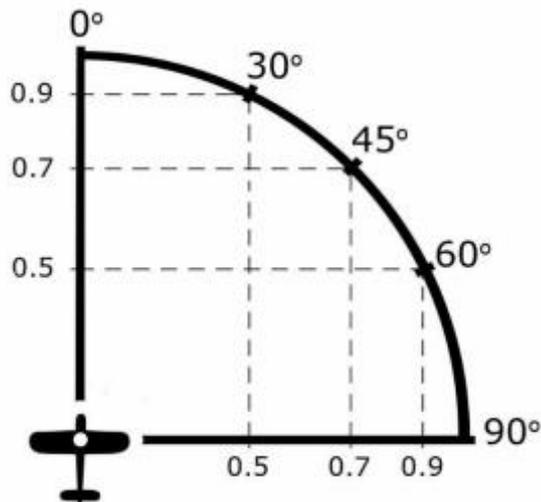
\*O gerenciamento da casa decimal está implícito

- **COMPONENTES DE VENTO E CORREÇÃO DE DERIVA**

Aqui, o único trabalho será memorizar o valor do seno e cosseno dos ângulos notáveis:

$$\begin{array}{lll} \text{Sen } 30^\circ = 0.5 & \text{sen } 45^\circ = 0.7 & \text{sen } 60^\circ = 0.9 \\ \text{Cos } 30^\circ = 0.9 & \text{Cos } 45^\circ = 0.7 & \text{Cos } 60^\circ = 0.5 \end{array}$$

579 975. Mais fácil do que decorar um CPF. Na verdade os valores são 0.866, 0.707 e 0.5. Como a ideia aqui é facilitar o cálculo mental, a aproximação dos valores nos dará resultados bastante razoáveis. Veremos isso no gráfico a seguir.



Crédito: Mike Roumens. M3.

Os valores no eixo vertical dizem respeito ao cosseno de cada ângulo (componente de proa ou cauda) . No eixo horizontal vemos o seno de cada ângulo (componente de través). Na figura ao lado, se o vento está perfeitamente alinhado com o eixo longitudinal da aeronave, é 100% de proa. Se está a 30° , é 90% de proa e 50% de través. Se está a 45° , é 70% de proa e 70% de través. Agora você viu a relação.

**Exemplo 4:** você está na final para a pista 10. O vento informado pela torre é 50° com 20kt. Qual a componente de proa e de través? O ângulo formado entre o eixo longitudinal da aeronave e o vento é de 50°. Neste caso 50 está mais próximo de 45, então usaremos este valor. O cosseno de 45 é 0.7 e o seno de 45 é 0.7. Fazer a conta mentalmente é fácil. Basta multiplicar o vento por 0.7. Vejamos.  $20 \times 0.7 = 14$ . As componentes são 14 de proa e 14 de través pela esquerda. Para comprovar, você pode traçar com uma régua duas componentes perpendiculares de 14cm, verá que a resultante será de 20cm.

**Exemplo 5:** você está na final da pista 29 e o vento, na cabeceira, é 140° com 12kt. Neste exato momento, o vento apresentado no ND não reflete a condição informada pela torre. De repente você começa a se perguntar se a componente de cauda estará dentro do limite da performance na hora do pouso. Vamos ver. O ângulo formado entre o eixo longitudinal e o vento é 30°, sendo que agora, pelo setor de cauda. O cosseno de 30° é 0.9, portanto  $12 \times 0.9 = 10.8$ . A componente de cauda é 10.8. Mentalmente podemos fazer a conta em duas etapas para facilitar o manuseio de decimais. Com a prática, você fará todo o processo em alguns segundos.

$$\begin{array}{r}
 10 \times 0.9 = 9 \\
 2 \times 0.9 = 1.8 \\
 + \quad \quad \quad \\
 \hline
 10.8
 \end{array}$$

**Exemplo 6:** podemos descobrir a componente de través (XWC) a partir do ângulo de correção de deriva (CD) e da velocidade em milhas por minuto (MPM).

**XWC = CD x MPM**



O ângulo de correção de deriva é função da velocidade da aeronave e da intensidade da componente de través. Podemos, então, estabelecer a mesma relação triangular que mencionamos no começo do artigo. A velocidade aqui é aproximadamente 8 MPM (TAS 470) e o ângulo de deriva é cerca de 3° (Embora a indicação para o ponto seja 12°, trata-se de algo como 12.8 ou 12.9). Nesse caso a componente de través é  $3 \times 8 = 24$ .

O cálculo anterior nos diz como encontrar a componente de través a partir do ângulo de deriva. Uma aplicação mais prática desta fórmula seria descobrir o ângulo de deriva a partir da componente de través. Isso pode ajudar, por exemplo, numa aproximação com vento cruzado. É possível saber, antes de ingressar na final, a correção de deriva que devemos empregar. Manipulando a fórmula anterior teremos:

$$CD = XWC/MPM$$

**Exemplo 7:** de posse da informação ATIS, você sabe que o vento na pista 33 é 360°/18kt. Utilizando o conceito do exemplo 4 você calcula a componente de través, que nesse caso é 9kt. Sua velocidade na final será 140kt (~ 2 MPM). Utilizando a fórmula teremos  $9 \div 2 = 4.5$ . Sabemos que a correção de deriva na final será em torno de 4 ou 5 graus.

### • BANK ANGLE

Quando falamos em curvas, o caso de maior interesse para a aviação comercial é a curva padrão de 3° por segundo, ou seja, 180° em um minuto. É designada como *Standard Rate Turn (SRT)* ou em algumas publicações como *Rate One Turn (ROT)*. A inclinação da curva é proporcional à velocidade. Sendo assim, como posso saber a inclinação da curva padrão para uma determinada velocidade? Veja a fórmula do *bank angle*.

$$\text{Bank} = \tan^{-1} \left( \frac{TAS^2/r}{g} \right)$$

Onde a TAS é em metros por segundo, r é o raio de curva em metros e g é a aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado. Não se assuste, é claro que não precisamos ter isto em mente. A fórmula está aqui para que você saiba que os valores da tabela a seguir vieram de algum lugar.

TAS	60kt	120kt	180kt	240	300kt
BANK	9°	18°	27°	36°	45°

Podemos observar uma relação aqui.

$$60\text{kt} = 1 \text{ MPM} \rightarrow 1 \times 9 = 9$$

$$120\text{kt} = 2 \text{ MPM} \rightarrow 2 \times 9 = 18$$

$$180\text{kt} = 3 \text{ MPM} \rightarrow 3 \times 9 = 27$$

Acho que você já percebeu. Para manter o *bank* da curva padrão, basta pegar sua velocidade em milhas por minuto e multiplicar por nove.

$$\text{BANK SRT} \sim \text{MPM} \times 9$$

Outra coisa que podemos ver na tabela é que para velocidades acima de 180kt, o *bank* necessário para manter a curva padrão é maior do que 30°. curvas com mais de trinta graus de inclinação não fazem parte da operação normal (a não ser que você queira fazer uma visita ao departamento de segurança da sua empresa!). Na construção dos procedimentos, a ICAO assume um *bank* máximo de 25°. Portanto para velocidades acima de 180kt a SRT não é requerida.

## • RAIOS DE CURVA

Agora falaremos sobre os raios de curva. Saber o raio é importante para calcular a antecipação de curvas, a fim de manter a trajetória da aeronave dentro do limite lateral dos procedimentos. A fórmula do raio de curva em milhas náuticas é:

$$r = \text{TAS} / 20 \times R \times \pi$$

Onde a TAS é em nós e R é a razão de curva. Vimos que até 180kt é possível manter a SRT, então substituindo R por 3 teremos  $r = \text{TAS} / 20 \times 3.14 \times 3$ . Portanto para velocidades até 180kt o cálculo do raio é:  $r = \text{TAS} / 188$ . Uma ótima aproximação disso será:

$$r \sim \text{TAS} \times 5\%$$

TAS	60kt	100kt	120kt	140kt	180kt
r ~	0.3nm	0.5nm	0.6nm	0.7nm	0.9nm

Acima de 180kt, temos que assumir que o *bank* está limitado entre 25 e 30 graus. Assumiremos o valor médio de 27.

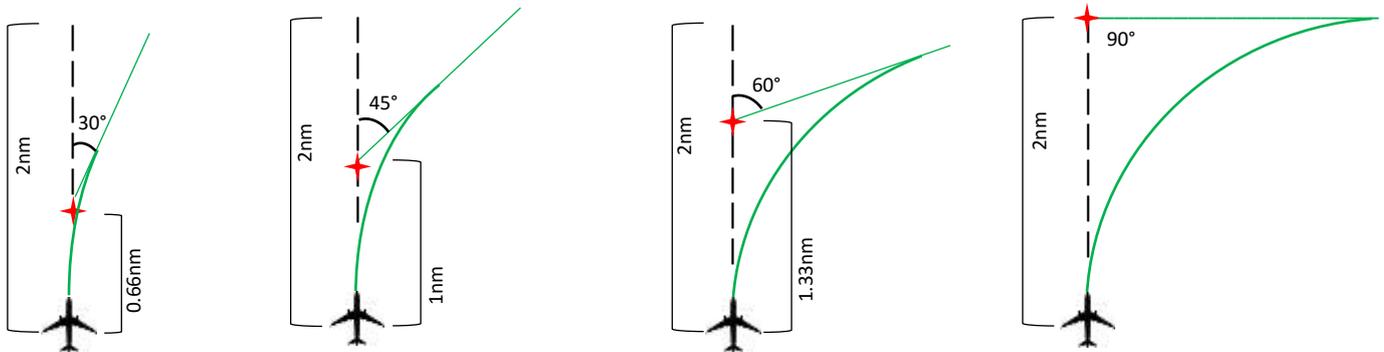
Raio de curva para <i>bank</i> 27°						
TAS	180kt	240kt	300kt	360	420	480kt
MPM	3	4	5	6	7	8
r ~	1	2	3	4	5	6

Aí está. O raio de curva em alta velocidade é a velocidade em milhas por minuto menos 2.

$$r \sim \text{MPM} - 2$$

## • ANTECIPAÇÃO DE CURVAS (FLY BY)

Como posso usar o raio para calcular antecipação de curvas? Depende do “tamanho” da curva. Se a curva (mudança de proa) é de 90°, inicie a curva à distância de um raio do fixo. Se a curva é de 60°, inicie a curva à distância de 2/3 de raio do fixo. 45° a meio raio e 30° a 1/3 do raio. Vejamos isso graficamente. As figuras abaixo representam mudança de proa. Digamos que a velocidade da aeronave é 250kt e bank de 27°. 250kt é aproximadamente 4 MPM. O raio de curva é  $4 - 2 = 2\text{nm}$ .



Podemos perceber que o raio multiplicado pela amplitude da curva e dividido por 100 é uma aproximação muito boa. Compare os resultados abaixo com os exemplos acima.

$$2 \times 30 \div 100 = 0.6$$

$$2 \times 45 \div 100 = 0.9$$

$$2 \times 60 \div 100 = 1.2$$

$$2 \times 90 \div 100 = 1.8$$

Podemos desconsiderar a divisão por 100 e fazer somente a multiplicação. Por exemplo:  $2\text{nm} \times 30^\circ = 60$ . Sabemos que este 60 quer dizer 0.6nm. Assim podemos concluir a regra para cálculo de antecipação de curvas.

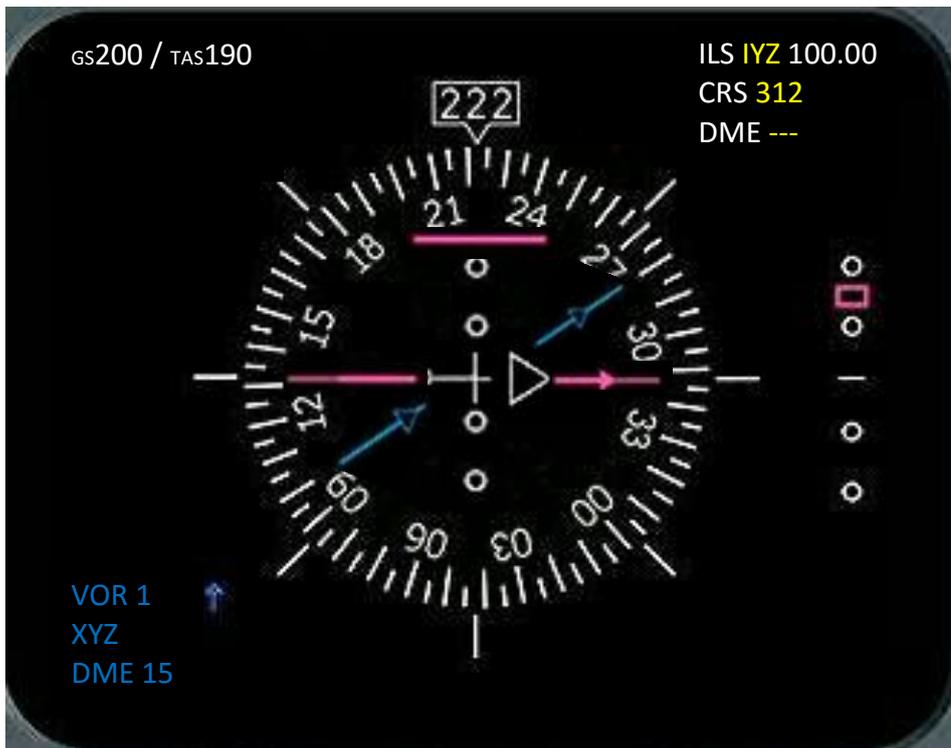
**Fly by (distância antes do fixo) = raio x abertura da curva\***

\*O gerenciamento da casa decimal está implícito.

A regra acima é válida para um *bank de 27°*. Os resultados não são exatos, mas se você observar o comportamento do piloto automático, vai ver que o erro é bem pequeno. É uma aproximação bem melhor do que a regra de usar 1% da TAS.

## • INTERCEPTAÇÃO DE CURSOS

Um dia você resolveu interceptar o ILS sem ajuda do FMS ou qualquer *display* de navegação que possa dar uma dica de quando iniciar a curva para interceptar. Se a proa de interceptação é pequena, digamos 30°, basta esperar o “*localizer alive*”. Fácil. Agora considere o cenário a seguir.



Nesse caso, esperar o deslocamento do CDI vai resultar em um *overshoot* dos grandes. Como posso antecipar a curva, usando somente as informações contidas aqui?

Neste exemplo o cálculo da antecipação da curva é  $20/t$ . Onde  $t$  é o tempo para a estação e 20 é uma constante na interceptação a  $90^\circ$ . Achar o tempo para a estação é fácil. Temos a *ground speed* de 200kt ( $\sim 3$  MPM). Prosseguindo nesta proa, você estima que o ponto de interceptação será a 12 DME. 12 milhas a 3 milhas por minuto nos dará 4 minutos.  $20 \div 4 = 5$ . Quando a diferença entre a marcação do VOR e o curso do localizador for de aproximadamente  $5^\circ$ , inicie a curva para interceptar. Isto vale para qualquer velocidade ou distância. Considere o mesmo exemplo acima, só que agora a velocidade é 250kt (imagino que será uma daquelas aproximações “arrojadas”). O tempo para a estação será 3 minutos. Portanto  $20 \div 3 \sim 7$ . Quando o VOR marcar  $305^\circ$ , inicie a curva.

#### Interceptações:

$$90^\circ = 20/t$$

$$60^\circ = 10/t$$

$$45^\circ = 10/t$$

Esta regra é válida para *bank* de aproximadamente  $30^\circ$ . Além disso, nos primeiros graus de inclinação das asas, a aeronave não está curvando na razão desejada, portanto é interessante dar uma margem ao resultado encontrado. Você encontrará essa margem através da tentativa e erro. Posso garantir que o erro não será grande.

Tudo isto pode parecer desnecessário numa aviação cada vez mais automatizada, mas se a ideia é estar sempre a frente da aeronave, estes conceitos ajudarão bastante. Tony Kern define quatro níveis de habilidade do aviador: *Safe – Effectiveness – Efficiency – Precision*. Se você busca pelo último degrau nesta escada, entender a geometria do voo é um começo.